Séries de Vecteurs - Exponentielle de Matrices

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Définition

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n n(\mathbb{K}), \exp(A) = \mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}}$$

La série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ donc cette série de matrice converge pour toute matrice

Propriétés

$$\begin{array}{rcl}
\exp(0_{\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})}) & = & I_n \\
\exp(P^{-1}AP) & = & P^{-1}\exp(A)P \\
\exp(A^T) & = & (\exp A)^T \\
\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix} \\
\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
\text{Si } A \text{ et } B \text{ commutent,} & \text{alors} & B\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^A B \\
\text{Si } A \text{ et } B \text{ commutent,} & \text{alors} & \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B \\
\text{La matrice } \mathrm{e}^A \text{ est inversible} & \text{et} & \left(\mathrm{e}^A\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-A} \\
\text{La fonction } t \mapsto \mathrm{e}^{At} \text{ est dérivable} & \text{et} & \frac{d}{dt}\mathrm{e}^{At} = A\mathrm{e}^{At} \\
\mathrm{Sp}(\mathrm{e}^A) & = & \{\mathrm{e}^\lambda | \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} \\
\det(\mathrm{e}^A) & = & \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}
\end{array}$$

Injectivité, surjectivité

$A \mapsto \mathrm{e}^A$ n'est pas injective :

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -(\theta+2\pi) \\ \theta+2\pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$A \mapsto \mathrm{e}^A$ n'est pas surjective :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}),$$

$$\mathrm{e}^A \in Gl_n(\mathbb{K}) \subsetneq \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$$